

PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

- Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- *Permutacija* je bilo koji raspored svih elemenata skupa .
- Permutacije bez ponavljanja elemenata se mogu definisati i kao broj svih *bijektivnih preslikavanja* skupa A u samog sebe.

Primjer:

- Jedna od permutacija skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bez ponavljanja elemenata, je preslikavanje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Broj permutacija* skupa od elemenata iznosi

$$P(n) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

- Simbol $n!$ je skraćenica za zapisivanje uzastopnog proizvoda od elemenata i čita se *faktorijel*.

$$P(n) = nP(n-1) = n \cdot (n-1)P(n-2) = \dots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1$$

- Po definiciji se uzima da je $0! = 1$

Primjer:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

• **Primjer:**

Dat je skup $A = \{a_1, a_2\}$. Koliko ima permutacija elemenata ovoga skupa, a da se elementi ne ponavljaju?

- Ima ih dvije. $P(2) = 2 \cdot P(1) = 2 \cdot 1 = 2$

To su: a_1a_2 i a_2a_1

Primjer:

- Dat je skup $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Koliko ima permutacija elemenata ovoga skupa, a da se elementi ne ponavljaju?

Ima ih šest. $P(3) = 3 \cdot P(2) = 3 \cdot 2 \cdot P(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

To su:
 $a_1a_2a_3$ $a_2a_1a_3$ $a_3a_1a_2$
 $a_1a_3a_2$ $a_2a_3a_1$ $a_3a_2a_1$

• **Primjer:**

Na koliko načina se mogu rasporediti 6 različitih knjiga na policu?

$$P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

• **Primjer:**

Pčela treba da skupi polen sa 7 različitih cvjetova. Kada uzme polen sa cvijeta ona se na njega više ne vraća. Na koliko načina pčela može da obiđe svih 7 cvjetova?

$$P(7) = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

PR. 1

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$a_1 a_2 a_3 a_4$

$a_1 a_2 a_4 a_3$

$a_1 a_3 a_2 a_4$

$a_1 a_3 a_4 a_2$

$a_1 a_4 a_2 a_3$

$a_1 a_4 a_3 a_2$

$a_2 a_1 a_3 a_4$

$a_2 a_1 a_4 a_3$

$a_2 a_3 a_1 a_4$

$a_2 a_3 a_4 a_1$

$a_2 a_4 a_1 a_3$

$a_2 a_4 a_3 a_1$

$a_3 a_1 a_2 a_4$

$a_3 a_1 a_4 a_2$

$a_3 a_2 a_1 a_4$

$a_3 a_2 a_4 a_1$

$a_3 a_4 a_1 a_2$

$a_3 a_4 a_2 a_1$

$a_4 a_1 a_2 a_3$

$a_4 a_1 a_3 a_2$

$a_4 a_2 a_1 a_3$

$a_4 a_2 a_3 a_1$

$a_4 a_3 a_1 a_2$

$a_4 a_3 a_2 a_1$

PR.2 Odredimo 57. permutaciju elemenata $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Sa elementom 1 pocinju $4! = 24$ permutacije $48 < 57$

Sa elementom 2 pocinju $4! = 24$ permutacije $48 < 57$

Sa elementom 3 pocinju $4! = 24$ ali $48 + 24 = 72 > 57$

\Rightarrow Sa elementom 31 pocinju $3! = 6 \Rightarrow 48 + 6 = 54 < 57$

Sa elementom 32 pocinju $3! = 6 \Rightarrow 54 + 6 = 60 < 57$

\Rightarrow Sa elementom 321 pocinju $2! = 2 \Rightarrow 54 + 2 = 56$

$\Rightarrow 32154 = 56$ -ta

$\Rightarrow 32415$ – tacno 57-a PERMUTACIJA

PR.3 Koja po redu je permutacija rec petar, ako je prva AEPRT

Sa A $\Rightarrow 4! = 24$ 58

Sa E $\Rightarrow 4! = 24$ 58

Sa PA $\Rightarrow 3! = 6$ 58

Sa PEA $\Rightarrow 2! = 2$ 58

Sa PER $\Rightarrow 2! = 2$ 58

\Rightarrow PETAR je 59. Permutacija

PERMUTACIJE SA PONAVLJANJEM

- Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Broj *permutacija sa ponavljanjem*, skupa od elemenata, među kojima ima jednakih k_1, k_2, \dots, k_m , iznosi

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_m}(n) = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \dots \binom{k_m}{k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

- **Primjer:**

Napisati sve permutacije elemenata a, b, b

abb, bab, bba

- **Primjer:**

Odrediti broj permutacija elemenata $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$

Broj permutacija je

$$P_{3,4}(7) = \binom{7}{3} \binom{7-3}{4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = 35$$

Pr1.

Odrediti broj permutacija od elemenata a, a, a, b, b, b, c .

Rešenje:

$$P_{3,3,1}(7) = \frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 140$$

Pr 2.

Koliko ima sedmocifrenih brojeva obrazovanih od cifara $0, 0, 0, 0, 1, 2, 3$, ne uzimajući u obzir one koji počinju nulom ili nulama?

Rešenje:

$$3 \cdot P_{4,1,1}(6) = \frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

Pr 3.

Koliko permutacija od elemenata a, a, a, a, a, b, b, b, c, počinje sa a, sa b i sa c?

Rešenje:

$$a \quad P_{4,3,1}(8) = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

$$b \quad P_{5,2,1}(8) = \frac{8!}{5! \cdot 2! \cdot 1!} = 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$$

$$c \quad P_{5,3}(8) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Pr 4.

Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, počinje sa 22, sa 313 i sa 1234?

Rešenje:

$$22 - P_{1,1,4,3}(9) = \frac{9!}{4! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 2520$$

Pr 5.

Odrediti broj permutacija koje se mogu formirati od svih činilaca proizvoda $a^5 \cdot b^3$.

Rešenje: 56

ZADACI ZA VEŽBANJE

1148 - 1160

1169 - 1189